www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE de l'ENERGIE
et des MATERIAUX d'ORLEANS
Spé.M et T-

Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

CONCOURS 1990

Option : Spéciales M, M', P, P', T, T', TA

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. — Coefficient : 4

Chaque candidat doit traiter deux problèmes :

- le problème A et le problème B pour les candidats des options M, M', P, P', T';
- le problème A et le problème C pour les candidats des options T, TA.

Il est demandé aux candidats de faire figurer très lisiblement sur leurs copies la lettre du problème traité et de respecter l'ordre des questions à l'intérieur de chaque problème.

Les correcteurs tiendront compte, dans une large mesure, de la clarté et de la précision des réponses, du soin apporté à la présentation des résultats ainsi que de la **concision** de la rédaction. À titre indicatif, une solution détaillée de chacun des problèmes ne devrait pas dépasser six pages manuscrites.

PROBLÈME A (Commun à toutes les options)

Dans toute cette partie, $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels (n étant un entier naturel non nul) et, pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on note par $N(A)$ le réel positif ou nul défini par :

$$N(A) = \text{Max}\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| ;\ 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

I. 1. Montrer que, pour tout nombre réel α et toutes matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, on a :

$N(A) = 0$ si et seulement si $A = 0$;
$N(\alpha A) = |\alpha| N(A)$;
$N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$;
$N(AB) \leqslant N(A) N(B)$.

2. Soit λ une valeur propre réelle ou complexe d'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$|\lambda| \leqslant N(A).$$

II. Une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$ est appelée matrice de Markov si ses coefficients vérifient :

P_1. $a_{ij} \geqslant 0$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

P_2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

1. Montrer que l'ensemble S des matrices de Markov est une partie convexe de $M_n(\mathbb{R})$ contenant la matrice unité et stable par produit matriciel dans M.

2. Soit A une matrice de Markov. Calculer $N(A)$, montrer que 1 est une valeur propre de A et donner un vecteur propre (non nul) associé. Montrer que toutes les valeurs propres réelles ou complexes de A ont un module inférieur ou égal à 1.

3. Dans cette question on identifie $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) au plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de Markov de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ii} \neq 0$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$; on pose $\delta = \text{Min}\{ a_{ii},\ 1 \leqslant i \leqslant n \}$. Montrer que les valeurs propres réelles ou complexes de A sont situées dans le disque dont le centre a pour affixe δ et tangent au cercle unité au point d'affixe 1.

Tournez la page S.V.P.

4. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de S tel que $a_{ij} \neq 0$, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Montrer que le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 et que toute autre valeur propre réelle λ a une valeur absolue strictement inférieure à 1.

5. La puissance k-ième d'une matrice de Markov est-elle encore une matrice de Markov ?

6. On considère une matrice de Markov $A = (a_{ij})$ symétrique et qui vérifie $a_{ij} \neq 0$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, et tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P = (p_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne a tous ses termes égaux (que l'on déterminera) et une matrice diagonale $D = (d_{ij})$ avec $d_{11} = 1$ qui vérifient : $A = PD({}^tP)$ où ${}^tP$ désigne la transposée de P.

Déterminer $L \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{k \to \infty} N(D^k - L) = 0$.

Montrer que pour tout k on a $A^k = PD^k({}^tP)$ et que la limite quand k tend vers $+\infty$ de A^k est une matrice de rang 1 ayant tous ses termes constants.

III. *Application numérique.*

On pose : $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Trouver les valeurs et les vecteurs propres de A.

Tracer le disque étudié à la question II.3. ainsi que le cercle unité.

Donner les matrices D et P analogues à celles de la question II.6. Calculer directement A^k ainsi que sa limite quand k tend vers $+\infty$ pour retrouver le résultat de la question II.6.

PROBLÈME B (Candidats des options M, M', P, P', T')

Dans tout ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie I_M

1. i. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$.

ii. On note $Y_0(x)$ la somme de la série en tout point où celle-ci converge. Montrer que Y_0 est solution de l'équation différentielle :

$$x^2 Y_0''(x) + x Y_0'(x) + x^2 Y_0(x) = 0.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) : x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0,$$

où y désigne une fonction réelle de la variable réelle x.

On cherche les solutions non nulles de cette équation développables en série entière dans un intervalle ouvert contenant l'origine sous la forme :

$$y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

où $a_0 \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{N}$.

i. Établir les relations vérifiées par les coefficients a_k.

Tournez la page S.V.P.

ii. En déduire que $\lambda = n$ et calculer a_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

iii. Calculer les coefficients a_{2p} et déterminer le rayon de convergence de la série.

iv. On pose $Y_n(x) = \dfrac{y(x)}{a_0\, 2^n (n!)}$. Établir les relations de récurrence :

(1) $\quad 2Y_n' = Y_{n-1} - Y_{n+1}$, pour tout $n \geqslant 1$;

(2) $\quad Y_0' = -Y_1$.

Partie II_M

1. Établir la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{-itx}\, dt$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_n(x) = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{-itx}\, dt.$$

Démontrer que F_n est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$.

(On pourra montrer, grâce à un changement de variable, que F_n s'écrit, pour tout $n \geqslant 0$, comme une intégrale de Riemann à un paramètre.)

3. i. Exprimer $F_n'(x)$ en fonction de $F_{n+1}(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

ii. Calculer $F_n + F_n''$ en fonction de F_{n+1}, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

iii. Déduire de i. et ii. que l'application :

$$G_n : x \longmapsto x^n F_n(x)$$

vérifie l'équation différentielle (E_n).

4. i. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-it)^k}{k!} x^k \right) dt \right).$$

ii. En déduire que l'on a :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} (-it)^k\, dt \right) \frac{x^k}{k!}.$$

5. i. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'une constante c_n telle que :

$$x^n F_n(x) = c_n Y_n(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Déterminer c_n en fonction de $F_n(0)$.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME C (Candidats des options T, TA)

Dans tout ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie I

1. i. Démontrer que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, la série numérique : $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} a^{2k}$

est convergente.

ii. On suppose $a = 1$ et on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}.$$

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|S_n - S| < 10^{-6}$.

2. On note $Y_0(x)$ la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

en tout point $x \in \mathbb{R}$ où la série converge.

i. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

ii. Montrer que Y_0 est solution de l'équation différentielle :

$$x^2 Y_0''(x) + x Y_0'(x) + x^2 Y_0(x) = 0.$$

iii. Soit $\varepsilon > 0$. Établir l'existence d'un polynôme P tel que, quel que soit $x \in [-2, 2]$ et $i \in \{0, 1, 2\}$ on ait :

$$|P^{(i)}(x) - Y_0^{(i)}| < \varepsilon$$

($P^{(i)}$ et $Y_0^{(i)}$ désignent les dérivées i-èmes de P et Y_0 respectivement.)

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) : x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0,$$

où y désigne une fonction réelle de la variable réelle x.

On cherche les solutions non nulles de cette équation, développables en série entière dans un intervalle ouvert contenant l'origine, sous la forme :

$$y(x) = x^\lambda \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

où $a_0 \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{N}$.

i. Établir les relations vérifiées par les coefficients a_k.

ii. En déduire que $\lambda = n$ et calculer a_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

iii. Calculer les coefficients a_{2p} et déterminer le rayon de convergence de la série.

iv. On pose $Y_n(x) = \frac{y(x)}{a_0 2^n (n!)}$. Établir les relations de récurrence :

(1) $2Y_n' = Y_{n-1} - Y_{n+1}$, pour tout $n \geq 1$;

(2) $Y_0' = -Y_1$.

Tournez la page S.V.P.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE de l'ENERGIE
et des MATERIAUX d'ORLEANS
Spé.M et T-

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi)\, d\varphi .$$

1. i. Établir la relation :

$$T_0(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p I_{2p}\, x^{2p}}{(2p)!},$$

où $I_{2p} = \int_0^{\pi} (\sin \varphi)^{2p}\, d\varphi$.

ii. Démontrer que T_0 est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$.

2. i. Démontrer les égalités :

(1) $2T_n' = T_{n-1} - T_{n+1}$, pour tout $n \geqslant 1$;

(2) $T_0' = -T_1$.

ii. Calculer I_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

iii. En déduire que $T_n = Y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Déduire de ce qui précède les valeurs des intégrales :

$$S_{n,2m+1} = \int_0^{\pi} (\sin n\varphi)\,(\sin \varphi)^{2m+1}\, d\varphi$$

et

$$C_{n,2m} = \int_0^{\pi} (\cos n\varphi)\,(\sin \varphi)^{2m}\, d\varphi$$

où n, m décrivent $\mathbb{N}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail